Distance minimale à l'origine d'un 3-simplexe

BODIN Antoine
antoinexp@gmail.com

26 août 2012

Ce document propose une méthode algorithmique de détermination du point d'un 3-simplexe situé à une distance minimale par rapport à l'origine.

1 Définitions et mise en équation du problème

Les conventions et notations suivantes sont utilisées dans ce document :

- Tous les objets présentés dans ce document sont définis dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^3, (\cdot|\cdot))$
- $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ est la norme canoniquement associée au produit scalaire précédent
- Pour tous points $x, y \in E$, on définit le segment : $[xy] = \{tx + (1-t)y | t \in [0;1]\}$
- On considère un ensemble fini de 4 points $Q = \{A_1; \ldots; A_4\}$, et C l'enveloppe convexe de Q :

$$C = CH(Q) = \left\{ \sum_{A \in Q} t_A A \,\middle|\, \forall A \in Q, t_A \in [0;1] \wedge \sum_{A \in Q} t_A = 1 \right\}$$

  (C vérifie donc : $\forall x, y \in C^2, [xy] \subset C$) [1]
  On supposera de plus que l'ensemble des points de Q définissent effectivement C, c'est à dire que :

$$\forall P \in Q, CH(Q - \{P\}) \neq CH(Q)$$

  C est alors un 3-simplexe.
- On pose également $E = \{A_1A_2; A_1A_3; A_1A_4; A_2A_3; A_2A_4; A_3A_4\}$ les arrêtes de C, et $F = \{A_1A_2A_3; A_1A_2A_4; A_1A_3A_4; A_2A_3A_4\}$ les faces de C

l'enjeu du problème consiste alors déterminer l'unique point $A \in C$ vérifiant :

$$||A|| = \inf_{P \in C} ||P||$$

L'existence est évidente : elle provient de la continuité de la norme et de la compacité de C, et l'unicité provient de la convexité de C.

2 Région de Voronoi

Le principe de l'algorithme réside dans la recherche de la région de Voronoi dans lequel se situe l'origine. Dans toute cette section, on considère un $\sigma \in S_4$ et on pose $(i, j, k, l) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4))$

1. CH pour Convex Hull

2.1 Régions de Voronoi de Q

L'origine O appartient à la région de Voronoi du point A_i si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(O-A_i|A_j-A_i) & \leq & 0\\(O-A_i|A_k-A_i) & \leq & 0\\(O-A_i|A_l-A_i) & \leq & 0\end{array}\right.$$

C'est à dire, si et seulement si :

$$||A_i||^2 \leq \min\{(A_i|A_j);(A_i|A_k);(A_i|A_l)\}$$

Si cette condition est vérifiée, on a alors $A = A_i$.

Ainsi, en considérant la matrice $M = ((A_i|A_j))_{1\leq i,j\leq 4}$, on détermine rapidement l'appartenance de O à une région de Voronoi d'un élément de Q en comparant un élément de la diagonale avec le reste de sa ligne (ou de sa colone).

2.2 Régions de Voronoi de E

L'origine O appartient à la région de Voronoi de l'arête A_iA_j si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ccc}(O-A_i|A_j-A_i) & \geq & 0\\(O-A_j|A_i-A_j) & \geq & 0\\(O-A_i|(A_j-A_i)\times N(A_iA_jA_k)) & \geq & 0\\(O-A_i|(A_j-A_i)\times N(A_iA_jA_l)) & \geq & 0\end{array}\right.$$

où : $N(A_iA_jA_k) = (A_j - A_i)\times(A_k - A_i)$ (il s'agit d'une normale de la face $A_iA_jA_k$ dont l'orientation est en fait définie par l'ordre ijk).

Les 4 conditions se réduisent alors :

$$\left\{\begin{array}{ccc}(A_i|A_j) & \leq & \min\left\{||A_i||^2;||A_j||^2\right\}\\||A_j\times A_i||^2 & \leq & \det(A_j\times A_i, A_j-A_i, A_k)\\||A_j\times A_i||^2 & \leq & \det(A_j\times A_i, A_j-A_i, A_l)\end{array}\right.$$

soit, en posant $u = (A_j\times A_i)\times(A_j - A_i)$:

$$\left\{\begin{array}{ccl}(A_i|A_j) & \leq & \min\left\{||A_i||^2;||A_j||^2\right\}\\||A_j\times A_i||^2 & \leq & \min\{(u|A_k);(u|A_l)\}\end{array}\right.$$

2.3 Régions de Voronoi de F

L'origine O appartient à la région de Voronoi de la face $A_iA_jA_k$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{l}(O-A_i|N(A_iA_jA_k))(A_l-A_i|N(A_iA_jA_k))\leq 0\\(O-A_i|N(A_iA_jA_k)\times(A_j-A_i))\geq 0\\(O-A_i|(A_k-A_i)\times N(A_iA_jA_k))\geq 0\\(O-A_j|N(A_iA_jA_k)\times(A_k-A_j))\geq 0\end{array}\right.$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{l}\det(A_i,A_j,A_k)\det(A_l-A_i,A_j-A_i,A_k-A_i)\geq 0\\\det(A_i,A_j,N(A_iA_jA_k))\geq 0\\\det(A_i,A_k,N(A_iA_jA_k))\leq 0\\\det(A_j,A_k,N(A_iA_jA_k))\geq 0\end{array}\right.$$

2.4 Remarque

L'ensemble des régions de Voronoi de C constitue une partition complète de $\mathbb{R}^3 - C$, ainsi, si l'ensemble des tests précédents échouent, c'est donc que $O \in C$.

3 Distance et projection orthogonale

On considère le cas où O appartient à l'une des régions de Voronoi de C : la région du point A_i, de l'arête A_iA_j ou de la face $A_iA_jA_k$.

3.1 Localisation du point A

- Dans le cas du point, on a évidemment $A = A_i$
- Dans le cas de l'arête A_iA_j, il s'agit d'effectuer le projeté orthogonal de O sur le sous espace vectoriel $A_i + (A_j - A_i)\mathbb{R}$, donc de calculer t tel que : $(A_i + t(A_j - A_i)|A_j - A_i) = 0$, d'où $t = -\frac{(A_i|A_j - A_i)}{||A_j - A_i||^2}$. Finalement, avec $u = A_j - A_i$ on a :
$$A = A_i - \frac{(A_i|u)}{||u||^2}u$$
- Dans le cas de la face $A_iA_jA_k$, en posant $u = A_j - A_i$ et $v = A_k - A_i$:
$$A = A_i - \frac{(A_i|u)}{||u||^2}u - \frac{(A_i|w)}{||w||^2}w$$
où[2] :
$$w = v - \frac{(v|u)}{||u||^2}u$$
Une autre solution consiste à chercher la solution du système suivant :
$$\begin{cases} (A_j - A_i|A) = 0 \\ (A_k - A_i|A) = 0 \\ A = A_i + t(A_j - A_i) + s(A_k - A_i) \end{cases}$$
soit la résolution du système de Cramer :
$$\begin{cases} ||A_j - A_i||^2 t + (A_k - A_i|A_j - A_i)s = (A_i - A_j|A_i) \\ (A_k - A_i|A_j - A_i)t + ||A_k - A_i||^2 s = (A_i - A_k|A_i) \end{cases}$$

3.2 Évaluation de la distance

Si la localisation du point A n'est pas nécessaire, on peut également se limiter au calcul de la distance $d = ||A||$ avec :
- Dans le cas du point, $d = ||A_i||$
- Dans le cas de l'arête A_iA_j, après calcul on obtient :
$$d = \sqrt{\frac{||A_i||^2||A_j||^2 - (A_i|A_j)^2}{||A_i||^2 - 2(A_i|A_j) + ||A_j||^2}}$$
ce qui requiert 22 opérations (contre 25 avec la norme du vecteur A calculé précédemment)

2. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

– Dans le cas de la face $A_iA_jA_k$, avec $u = A_j - A_i$ et $v = A_k - A_i$:

$$d = \left| \frac{\det(u, v, A_i)}{||u||||v||} \right|$$

4 Intérêt et Conclusion

Ces notes ont été écrites pour clarifier un sous problème de l'algorithme de Gilbert-Johnson-Keerthi pour déterminer la distance minimale qui sépare deux convexes.